УДК 531.13

С. В. ДУДЧЕНКО, мл. науч. сотр., В. Н. ТИЩЕНКО, канд. физ.-мат. наук,
Симфероп. ун-т.

КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ОБОБЩЕННЫМ ТРЕНИЕМ.

Изучается математическая модель определенного класса систем виброизоляции, содержащая формальные (обобщенные) функции, которая сводится к последовательному решению краевых задач для дифференциальных уравнений с условиями их сопряжения, что приводит к трансцендентным уравнениям, решаемых численным методом. Получены аналитические и численные решения для автономных систем, которые позволяют решать задачи проектирования параметров системы демпфирования, обеспечивающих заданные условия нормального функционирования систем в условиях кратковременных сил инерции.

В некоторых конструктивных устройствах кинематических си стем виброизоляции вводится трение, описываемое законом Кулона

$$F = -f(x)N \operatorname{sgn} \dot{x}(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ - искомая величина относительного смещения, $f(x)$ - в общем случае переменный коэффициент трения скольжения (качения), $N = mg$ – нормальная реакция осциллятора массой m жесткости c в поле тяжести, так что уравнение его движения им еет вид:

, (2)

($\widetilde{W}(t)$ – переносное ускорение в направлении движения). Наиболее простой тип демпфера обеспечивает постоянную по величине силу трения качения или скольжения, т.е. $f(x) = const$, однако возможно создание демпфера с “точечным” $f(x) = \widetilde{\Delta}\delta(x)$ трением качения или, в общем случае, обобщенным трением Кул она:

$$f(x) = f + \widetilde{\Delta}\delta(x), \tag{3}$$

где $\widetilde{\Delta}$ - имеет размерность длины, $\delta(x)$ - функция Дирака.

Таким образом, уравнением движения осциллятора будет выр ажение

$$\ddot{x} + g\left(f + \widetilde{\Delta}\delta(x)\right)\operatorname{sgn}\dot{x} + \omega^2 x = -\widetilde{W}(\lambda t), \tag{4}$$

где $\omega^2 = c/m$, λ - частотный параметр внешнего возбуждения. Пол у-ченное уравнение является предметом рассмотрения данной статьи при начальных условиях $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=V_0$.

Введя безразмерные величины с некоторым линейным размером H:

$$\bar{x}=\frac{x}{H}, \quad \tau=\sqrt{\frac{g}{H}}t, \quad \dot{x}=\sqrt{gH}\bar{x}'(\tau), \quad \omega^2=\frac{g}{H}p^2,$$

$$W=\frac{\widetilde{W}}{g}, \quad \varepsilon^2=\frac{g}{H\lambda^2}, \quad \Delta=\frac{\widetilde{\Delta}}{H}, \tag{5}$$

можно получить уравнение (4) в безразмерной форме

$$\bar{x}''(\tau)+\left(f+\Delta\delta(\bar{x})\right)\operatorname{sgn}\bar{x}'(\tau)+p^2\bar{x}(\tau)=-W(\tau/\varepsilon) \tag{6}$$

с начальными условиями

$$\bar{x}(0)=0, \quad \bar{x}'(0)=\frac{V_0}{\sqrt{gH}}=\bar{V}_0. \tag{7}$$

В данном виде (6) уравнение движения не имеет численного р е-шения, поэтому его следует преобразовать в задачу, которая затем может быть решена известными методами. С этой целью умножим его на $\bar{x}'(\tau)$ и интегрируем на малом временном интервале $[\tau_k^+, \tau_k^-]$, где $\bar{x}(\tau_k)=0$. В результате интегрирования б удет:

$$\frac{1}{2}\bar{x}_+'^2-\frac{1}{2}\bar{x}_-'^2+\Delta=0, \tag{8}$$

т.е. в момент прохождения точки $\bar{x}=0$ скорость осциллятора по вел и-чине терпит разрыв и в последующем равна

$$|\bar{x}_+'|=\sqrt{\bar{x}_-'^2-2\Delta}$$

Знак скорости следует выбирать из условия, что

$$\operatorname{sgn}\bar{x}_+'(\tau_k)=\operatorname{sgn}\bar{x}_-'(\tau_k),$$

иначе происходит полная остановка.

При получении (8) были использованы следующие определения [1]:

$$\int_a^b \frac{dg(x)}{dx}dx=g(b)-g(a);$$

$$\int_a^b g(x)\delta(f(x))dx=\sum_{k=1}^N g(x_k)\frac{1}{|f'(x_k)|}, \text{ где } f(x_k)=0, \ a\le x_k\le b.$$

Таким образом, приходим к решению ряда начальных задач на интервалах $[\tau_{k-1},\tau_k](k=1,2...),\tau_0=0$:

$$\overline{x_k''}+f\,\mathrm{sgn}\,\overline{x_k'}+p^2\bar{x}_k=-W(\tau/\varepsilon)$$

$$\bar{x}_k(\tau_{k-1})=0,\ \ \overline{x_k'}(\tau_{k-1})=\sqrt{\overline{x_{k-1}'^2}-2\Delta\,\mathrm{sgn}\,\overline{x_{k-1}'}(\tau_{k-1})},\ \ (k\geq 2) \qquad (9)$$

$$\bar{x}_1(0)=0,\quad \overline{x_1'}(0)=\overline{V_0}\quad (k=1)$$

Значения границ интервалов (τ_{k-1},τ_k) находится из условия $\bar{x}_k(\tau_k)=0$.

Решение уравнений (9) можно получить в аналитической форме на интервалах $(\tau_{k-1},\bar{\tau}_k)$, $(\bar{\tau}_k,\tau_k)$, на которых постоянен знак скорости, где $\overline{x_k'}(\bar{\tau}_k)=0$, однако значение величин точек $\tau_k,\bar{\tau}_k$ можно найти только численно, так что аналитический вид решения не имеет особых преимуществ перед прямым численным м етодом, например Рунге-Кутта.

Свободные колебания . В этом случае $W(\tau/\varepsilon)=0$, так что колеба-ния существуют только за счет начальной скорости $V_0\neq 0$, опреде-ляющей параметр длины $H=V_0/\omega$.

Точное решение при $f=0$

$$x_k(t)=\frac{1}{\omega}\sqrt{V_0^2-2(k-1)\widetilde{\Delta}g}\,\sin p\tau=\frac{V_0}{\omega}\sqrt{1-2(k-1)\frac{\widetilde{\Delta}g}{V_0^2}}\,\sin\omega t,$$

указывает количество циклов $x_k(t)$ $(k\leq N)$, т.е. время движения T до полной остановки :

$$N=\left[\frac{V_0^2}{2g\widetilde{\Delta}}\right]+1,\quad T=\frac{\pi N}{\omega}\ \ ([a]\text{ - целая часть числа } a).$$

и амплитуду k-го цикла (k=1,2...N)

$$A_k=A_0\sqrt{1-2(k-1)\frac{\widetilde{\Delta}g}{V_0^2}};\ A_0=\frac{V_0}{\omega},$$

так что квадрат амплитуды уменьшается за время π/ω на постоянную величину $2\widetilde{\Delta}g/\omega^2$.

Аналогично можно получить аналитическое решение свободных колебаний в отсутствие “точечного” трения $(\widetilde{\Delta}=0)$. Решение задачи представлено во многих монографиях, например [2], поэтому здесь приводятся только выводы из решения:

– существует зона застоя (отсутствие движения), равная по значению $\left[-fH/p^2, fH/p^2\right]$, так что амплитуда колебаний уменьшается за "полупериод", равный в реальном времени π/ω, на постоянную величину $2fg/\omega^2$;

– при заданной скорости $\overline{V}_0$ начальная амплитуда колебаний равна

$$\overline{A}_0 = \bar{x}_1(\bar{\tau}_1) = \frac{\sqrt{f^2 + (\overline{V}_0 p)^2} - f}{p^2}, \quad tg\ p\bar{\tau}_1 = \frac{\overline{V}_0 p}{f} = tg(\omega \bar{t}_1),$$

так что число циклов колебаний N определяется целой частью от частного $\left[\sqrt{f^2 + V_0^2 p^2}/2f\right]$, полное время колебаний равно $T = (\bar{t}_1 + \pi N/\omega)$, а амплитуда колебаний k-го цикла равна

$$A_k = \overline{A}_0 H - 2(k-1)\frac{fg}{\omega^2}\ ; \quad (k=1,2...N)$$

Поэтому если начать отсчет времени с момента $\bar{t}_1$, то время движения при постоянном трении f будет меньше, чем при "точечном" $\Delta = f$ для $\overline{A}_0 < 1$, что более соответствует реальным значениям V_0, ω, f. Но этот вывод не снижает положительной значимости точечного трения, дополняющего постоянное трение f, величина которого не превышает $0{,}001$.

Вынужденные колебания. Ввиду значительной неопределенности ускорения $W(\lambda t)$ обычно рассматривается реакция осциллятора на гармоническое воздействие типа $W = A\sin(\lambda t + \varphi)$, где амплитуда ускорения задается в долях g: $A = kg$. Если рассматривается резонансный процесс $\lambda = \omega$, то численный анализ показал, что "точечное" трение с величиной Δ в отсутствие постоянного трения f не удерживает линейный рост резонансных колебаний для всех значений Δ, допускающих начальный процесс движения. Постоянно включенное трение f для значений $f \geq \pi k/4$ удерживает процесс колебаний без роста амплитуды вынужденных колебаний, но при этом движение происходит с остановками, длительность которых зависит от величины f (в отсутствие "точечного" трения). Если присутствуют оба механизма, то “точечное” трение изменяет порог величины f, при котором происх о-дит резонанс, в меньшую сторону, но период вынужденных колебаний не меняется.

В реальной ситуации резонансный режим гармонического во з-действия если и возникает, то длится конечное время, так что всегда можно выбрать параметр ω, определяющий собственный временной интервал, намного меньшим λ, определяющий вынужденную соста в-ляющую, т.е. $\omega = \varepsilon\lambda, \varepsilon << 1$.Так как решение уравнения движения с о-стоит из двух составляющих $x(t) = x_1(\omega t) + x_2(\lambda t) = x_1(\tau) + x_2(\tau/\varepsilon)$, то второе слагаемое отлично от нуля только в интервале $0 \le \tau \le O(\varepsilon)$, и описывается уравнен ием

$$x_2''(z) + \varepsilon^2 [f + \Delta\delta(x)] \operatorname{sgn} x_2'(z) + \varepsilon^2 p^2 x_2(z) = -W(z)\varepsilon^2 \ , \ z = \tau/\varepsilon,$$

что позволяет определить вынужденные колебания с точностью до членов $O(\varepsilon^2)$ уравнением:

$$x_2''(z) = -W(z)\varepsilon^2$$

с начальными условиями $x_2(0) = 0$, $x_2'(0) = 0$, так что $x_1(0) = 0$, $x_1'(0) = V_0 \varepsilon/\omega$, т.е.

$$x_2(z) = -\varepsilon^2 \int_0^z W(t)(z - t)dt$$

Уравнением для $x_1(\tau)$ будет исходное уравнение без правой ча с-ти, т.е. составляющая $x_1(\tau)$ описывает свободные колебания при де й-ствии "начальной" скорости от функции $x_2(z)$ при $z \to \infty$, например $V_0 = kg/\lambda$, если считать, что внутренние колебания возникают от га р-монических частоты λ. В безразмерном виде начальными условиями для $x_1(\tau)$ будет $\overline{V}_0 = k\,\varepsilon/p^2$.

В конечном счете при выполнении условия $\omega/\lambda << 1$ анализ ко-лебательного процесса состоит в изучении свободных колебаний о с-циллятора малой жесткости, что позволяет провести синтез системы демпфирования при наличии ряда ограничений на поведение системы как реакцию на и мпульс.

Например, пусть необходимо подобрать параметры f ,$\widetilde{\Delta}$ в сис-теме демпфирования так, чтобы амплитуда колебаний не превосход ила некоторую величину βH и движение системы закончилось при прохождении положения покоя, т.е. $x(T)=0$, при минимальном числе циклов свободных колебаний. Эта задача решается на основании полученных выше результатов, а именно:

1) значение βH должно быть больше величины участка застоя:

$$\beta > \frac{f}{p^2}, \qquad f < \beta p^2 = f_1;$$

2) "начальная" скорость $\overline{V}_0 = k\varepsilon / p^2$ должна быть больше значения $\sqrt{2\Delta}$:

$$\Delta < \frac{\overline{V}_0^{\,2}}{2} = \Delta_2;$$

3) первая амплитуда колебаний не должна превзойти βH:

$$\overline{x}_1(\overline{\tau}_1) = \frac{\sqrt{f^2 + (\overline{V}_0 p)^2} - f}{p^2} \le \beta, \quad f > \frac{\overline{V}_0^{\,2} - (\beta p)^2}{2\beta} = f_2, \quad \overline{x}_1'(\overline{\tau}_1) = 0;$$

4) первая амплитуда колебаний должна быть больше двух значений величины участка застоя:

$$\overline{x}_1(\overline{\tau}_1) \ge \frac{2f}{p^2}, \qquad f \le \frac{\overline{V}_0 p}{\sqrt{8}} = f_3$$

5) скорость прохождения положения равновесия $\overline{x}_1(\tau_1)=0$ должна быть меньше $\sqrt{2\Delta}$:

$$[\overline{x}_1'(\tau_1)]^2 < 2\Delta$$

$$\Delta \ge \frac{1}{2}\frac{\left(2f - \sqrt{f^2 + (\overline{V}_0 p)^2}\right)^2}{p^2} = \Delta_1(f).$$

В силу условий 3) и 4) величина постоянного трения скольжения f находится в интервале $f_2 \le f \le f_3$ (при $f_3 < f_1$), что накладывает дополнительное условие на максимальное смещение вв иду $f_3 > f_2$:

$$\beta \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\overline{V}_0}{p}. \tag{10}$$

Таким образом, имея исходные данные для проектирования – "начальную" скорость $V_0 = kg/\lambda$, частотный параметр $p^2 = cH/mg$ и максимально допустимое отклонение $x = H\beta$, удовлетворяющие огр а-ничению (10), можно подобрать параметры дем пфирования

$$\frac{\overline{V}_0^2 - (\beta p)^2}{2\beta} \le f \le \frac{\overline{V}_0 p}{\sqrt{8}}, \quad \Delta_1(f) < \Delta \le \frac{1}{2}\overline{V}_0^2,$$

которые делают возможным допустимое движение линейного осци л-лятора, описывающего достаточно обширный перечень систем виб-роизоляции, в частности и сейсмоизоляции [3]. Отметим, что “точечное” трение является при этом дополнительным условием обе с-печения нормального движения системы, с помощью которого процесс колебаний прекращается за минимально возможное время при малой величине постоянного трения скольж ения.

Список использованной литературы

1. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1978, 832с. 2. *Василенко Н.В.* Теория колебаний: Учеб. пособие. - К.: Вища шк., 1992. - 430 с.: ил. 3. *Власов Н.И., Гранкин О.В., Раков Б.В. Тищенко В.Н.* Динамика твердого тела на опорах качения. // Динамические системы. Киев, 1994. С.51-55.

Поступила в редколлегию 12.03.98